Auto-évaluation

Dérivée : fonctions transcendantes 04

Solutions

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. En appliquant la définition de fonction dérivée et le fait que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$, montrer que la dérivée de $f(x) = e^x$ est $f\,'(x) = e^x$.

2. En appliquant la définition de fonction dérivée et le fait que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\, h}{h}=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos\, h-1}{h}=0$, montrer que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f\,'(x) = \cos x$.

3. *a*) Soit $y = x^2 \ln 3x$. Déterminer pour quelle(s) valeurs(s) de x, la pente de la tangente est nulle.

1. Par la définition de fonction dérivée, on a :

$$f\,'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$
$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}=e^x\text{, puisque }=1.$$

2. Par la définition de fonction dérivée, on a :

$$f\,'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos\, h+\cos x\sin\, h-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos\, h-1)+\cos x\sin\, h}{h}$$
$$=\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{(\cos\, h-1)}{h}+\cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\, h}{h}$$
$$=\sin x\times 0+\cos x\times 1=\cos x.$$

3. *a*) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\ln 3x\right)=2x\ln 3x+x^2\times\dfrac{1}{3x}\times 3$

$$=2x\ln 3x+x=x(2\ln 3x+1).$$

On doit déterminer pour quelles(s) valeur(s) la dérivée s'annule. On trouve $x=0$, qui est à rejeter car cette valeur n'est pas dans le domaine de la fonction. En effet, ln 0 n'est pas défini. On trouve également :
$2 \ln 3x = -1$, d'où $\ln 3x = -1/2$ et $3x = e^{1/2}$. On a donc :

$$x=\frac{e^{-1/2}}{3}=\frac{1}{3\sqrt{e}}.$$

La pente de la tangente est nulle à $x=1/3\sqrt{e}$.

b) Soit $y = (x^2 - 2x)e^{-x}$. Déterminer pour quelle(s) valeurs(s) de x, la pente de la tangente est nulle. Trouver l'équation de la tangente en $x = 2$.

b) Déterminer l'abscisse du minimum de cette fonction. Confirmer par un test.

$$f'(x) = (2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x)e^{-x} \times -1$$
$$= e^{-x}(2x - 2 - x^2 + 2x)$$
$$= e^{-x}(-x^2 + 4x - 2)$$

La dérivée s'annule lorsque $-x^2 + 4x - 2 = 0$, ce qui donne

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{-2}$$
$$= \frac{-2(2 \pm \sqrt{2})}{-2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

La dérivée s'annule donc à :

$x_1 = 2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

La tangente est horizontale aux points correspondants.

Le point d'abscisse 2 est $(2; f(2)) = (2;0)$.

La pente de la tangente en ce point est :

$f'(2) = e^{-2}(-(2)^2 + 4\times 2 - 2) = 2/e^2$.

L'équation de la tangente est :

$$y = \frac{2}{e^2}(x-2) = \frac{2x-4}{e^2}.$$

4. *a*) Utiliser les propriétés de l'opérateur de dérivation pour montrer que la dérivée de $f'(x) = \tan x$ est $f'(x) = \sec^2 x$.

4. *a*)
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

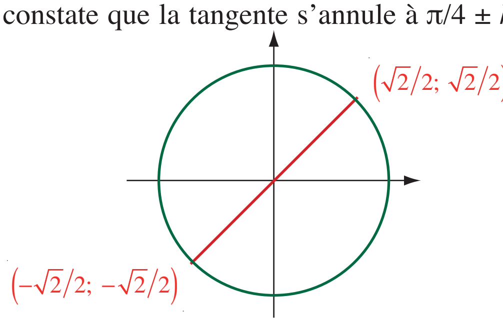
b) Utiliser les propriétés de l'opérateur de dérivation pour déterminer la dérivée de $f'(x) = e^{-x} \sin x$. Déterminer les valeurs pour lesquelles la tangente est horizontale.

b)
$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} \sin x\right) = e^{-x} \times \cos x + e^{-x} \times -1 \times (\sin x)$$
$$= e^{-x}(\cos x - \sin x).$$

La dérivée s'annule lorsque $\cos x - \sin x = 0$, d'où

$\sin x = \cos x$ et $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$ ou $\tan x = 1$.

En considérant le cercle trigonométrique, on constate que la tangente s'annule à $\pi/4 \pm k\pi$.



c) En quel(s) point(s) la courbe de la fonction $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ admet-elle une tangente horizontale?

5. La procédure de démarrage d'un système dure 10 minutes. L'énergie consommée durant cette procédure est :

$$P(t)=\frac{200t^4}{e^t}\text{ W},$$

où t est le temps en minutes. Au bout de 10 minutes, la consommation d'énergie demeure constante.

a) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la puissance durant la période de mise en marche.

b) À quel moment le taux de variation est-il nul?

c) Déterminer, au cours de ces vingt minutes, l'intervalle de temps durant lequel la consommation d'énergie est croissante et l'intervalle de temps durant lequel elle est décroissante.

d) Estimer l'énergie consommée à $t = 3$ à l'aide d'un modèle d'approximation linéaire de centre $t = 2$.

e) À l'aide de la différentielle, estimer la variation de la consommation dans l'intervalle de temps de 2 minutes à 2 minutes et demie.

c) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\frac{2(\ln x)^1\times\frac{1}{x}\times x-(\ln x)^2\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}.$$

La dérivée s'annule lorsque le numérateur s'annule, ce qui donne :
$\ln x(2 - \ln x) = 0$.
Pour que le produit s'annule, il faut que l'un des facteurs s'annule. On peut donc avoir $x = 0$ ou $2 - \ln x = 0$

Si $\ln x = 0$, $x = e^0 = 1$ et $f(1)=\dfrac{(\ln 1)^2}{1}=\dfrac{0}{1}=0$. La tangente est horizontale au point (1; 0).

Si $2 - \ln x = 0$, on a $\ln x = 2$ et $x = e^2$ et :
$f(2)=\dfrac{(\ln e^2)^2}{e^2}=\dfrac{2^2}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}=4e^{-2}$. La tangente est horizontale au point (e^2; 4 e^{-2}).

5. *a*) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{200t^4}{e^t}\right)=\frac{800t^3e^t-200t^4e^t}{e^{2t}}=\frac{200t^3(4-t)}{e^t}.$$

b) Le taux de variation est nul à $t = 0$ et à $t = 4$.

c) Si t est dans l'intervalle [0; 4[, le taux de variation est positif, la consommation d'énergie est croissante.
Si t est dans l'intervalle]4; 10[, le taux de variation est négatif, la consommation d'énergie est décroissante.

d) Le modèle d'approximation linéaire est :
$L(t) = P(2) + P'(2)\,(t - 2)$, où $P(2) = 3200/e^2$ et $P'(2) = 3200/e^2$. On a donc :

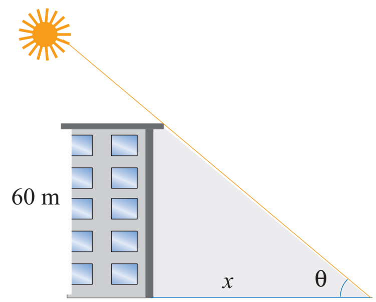
$$L(t)=\frac{3200}{e^2}+\frac{3200}{e^2}(t-2).$$

$$L(3)=\frac{3200}{e^2}+\frac{3200}{e^2}(3-2)=\frac{6400}{e^2}\approx 866\text{ W}.$$

e) La différentielle à 2 minutes est :
$dP|_2 = P'(2)\,dt$. Or, $dt = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$ min. On a donc :

$$dP|_2=\frac{3200}{e^2}\times 0{,}5=\frac{1600}{e^2}\approx 216\text{ W}.$$

6. Le Soleil passe au-dessus d'un édifice de 60 m.



a) En notant θ, l'angle d'élévation du Soleil et x la longueur de l'ombre de l'édifice, décrire la longueur de l'ombre en fonction de l'angle d'élévation.

b) Déterminer le taux de variation de la longueur de l'ombre lorsque l'angle d'élévation est de 45°, 60°. Exprimer ces résultats en mètres par degré et interpréter selon le contexte.

7. La position d'une particule excité électriquement est donnée par :

$$s(t)=\frac{4-\sin t}{4+\sin t}\ \text{m},$$

où t est en secondes.

a) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation au temps t.

b) Déterminer en quels instants la vitesse de la particule est nulle.

6. *a*) La relation est $\cot\theta = x/60$ et $x = 60\cot\theta$.

b) Le taux de variation est décrit par la dérivée par rapport à l'angle θ. Soit :

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(60\cot\theta)=-60\csc^2\theta.$$

$$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\pi/4}=-60\csc^2(\pi/4)=\frac{-60}{\sin^2(\pi/4)}$$

$$=\frac{-60}{(\sqrt{2}/2)^2}=\frac{-60\times 4}{2}=-120\ \text{m/rad}.$$

Pour transformer en mètres par degré, il faut se rappeler que la mesure α en degrés d'un angle θ en radians est donnée par :

$$\alpha=\frac{\theta\times 180°}{\pi}.$$

Pour convertir en degrés un angle de 1 radian, il faut le multiplier par 180°/π rad, d'où :

$$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\pi/4}=-120\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}=-120\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}\times\frac{\pi\ \text{rad}}{180°}$$

$$=-2{,}09\ \text{m/°}.$$

Le taux de variation est négatif, ce qui signifie que la longueur de l'ombre diminue lorsque l'angle d'élévation augmente, c'est-à-dire lorsque le Soleil s'élève dans le ciel.

$$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\pi/3}=-60\csc^2(\pi/3)=\frac{-60}{\sin^2(\pi/3)}$$

$$=\frac{-60}{(\sqrt{3}/2)^2}=\frac{-60\times 4}{3}=-80\ \text{m/rad}.$$

$$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\pi/3}=-80\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}=-80\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}\times\frac{\pi\ \text{rad}}{180°}=-1{,}39\ \text{m/°}.$$

On constate que la longueur de l'ombre diminue de moins en moins rapidement à mesure que le Soleil s'élève dans le ciel.

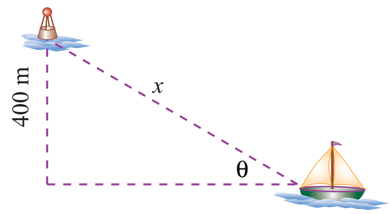
7. *a*) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{4-\sin t}{4+\sin t}\right)=\frac{\cos t(4+\sin t)-(4-\sin t)(\cos t)}{(4+\sin t)^2}$$

$$=\frac{4\cos t+\cos t\sin t-4\cos t+\sin t\cos t}{(4+\sin t)^2}$$

$$=\frac{2\sin t\cos t}{(4+\sin t)^2}=\frac{\sin 2t}{(4+\sin t)^2}.$$

b) La dérivée s'annule lorsque $\sin 2t = 0$, on a donc $2t = 0 \pm k\pi$ qui donne $t = \pm k\pi/2$ ou : $\{\ldots -\pi/2, 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \ldots\}$.

8. Un voilier descend le fleuve en naviguant en ligne droite. Sa trajectoire le fera passer à 400 m d'une bouée.

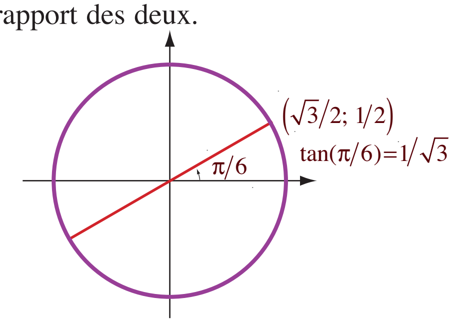


a) Exprimer la distance entre le bateau et la bouée en fonction de l'angle θ formé par la position de la bouée et la trajectoire du voilier.
b) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la distance par rapport à l'angle θ.
c) Calculer la distance et le taux de variation de celle-ci lorsque l'angle est de 30°. Exprimer le taux de variation en mètres par degré. En interprétant ce résultat selon le contexte, dire pourquoi le signe de ce taux de variation est négatif.

8. *a)* La distance est l'hypoténuse du triangle rectangle, la relation est $x = 400 \csc \theta$.
b) En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(400\csc\theta)=-400\csc\theta\cot\theta.$$

c) Le cercle trigonométrique donne directement la valeur du sinus et du cosinus et la tangente est le rapport des deux.



Lorsque l'angle est de 30°, la distance est :

$$x(\pi/6)=400\csc(\pi/6)=\frac{400}{\sin(\pi/6)}=\frac{400}{1/2}=800 \text{ m}.$$

et le taux de variation est :

$$\begin{aligned}\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\pi/6}&=-400\csc(\pi/6)\cot(\pi/6)\\&=-400\left(\frac{1}{\sin(\pi/6)}\right)\left(\frac{1}{\tan(\pi/6)}\right)\\&=-400\times\frac{2}{1}\times\frac{\sqrt{3}}{1}=-800\sqrt{3}\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}\\&=-800\sqrt{3}\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}\times\frac{\pi \text{ rad}}{180°}=-24\ \text{m/°}.\end{aligned}$$

Le taux de variation est négatif car la distance entre le bateau et la bouée diminue.

9. Utiliser la règle du produit et les propriétés de l'opérateur de dérivation pour démontrer que :

a) $\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x\right)=\sin 2x.$

b) $\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)=\cos 2x.$

9. *a)*
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x\right)&=\frac{d}{dx}(\sin x\times\sin x)\\&=\sin x\cos x+\cos x\sin x\\&=2\sin x\cos x=\sin 2x.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)&=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)\\&=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x.\end{aligned}$$