

Dérivée : fonctions transcendantes

04

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. En appliquant la définition de fonction dérivée et

le fait que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, montrer que la dérivée de $f(x) = e^x$ est $f'(x) = e^x$.

2. En appliquant la définition de fonction dérivée et le

fait que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, montrer que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$.

3. a) Soit $y = x^2 \ln 3x$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x , la pente de la tangente est nulle.

b) Soit $y = (x^2 - 2x)e^{-x}$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x , la pente de la tangente est nulle. Trouver l'équation de la tangente en $x = 2$.

4. a) Utiliser les propriétés de l'opérateur de dérivation pour montrer que la dérivée de $f(x) = \tan x$ est $f'(x) = \sec^2 x$.

b) Utiliser les propriétés de l'opérateur de dérivation pour déterminer la dérivée de $f(x) = e^{-x} \sin x$. Déterminer les valeurs pour lesquelles la tangente est horizontale.

c) En quel(s) point(s) la courbe de la fonction

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

admet-elle une tangente horizontale?

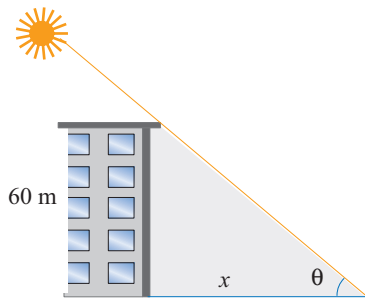
5. La procédure de démarrage d'un système dure 10 minutes. L'énergie consommée durant cette procédure est :

$$P(t) = \frac{200t^4}{e^t} \text{ W,}$$

où t est le temps en minutes. Au bout de 10 minutes, la consommation d'énergie demeure constante.

- a) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la puissance durant la période de mise en marche.
- b) À quel moment le taux de variation est-il nul?
- c) Déterminer, au cours de ces vingt minutes, l'intervalle de temps durant lequel la consommation d'énergie est croissante et l'intervalle de temps durant lequel elle est décroissante.
- d) Estimer l'énergie consommée à $t = 3$ à l'aide d'un modèle d'approximation linéaire de centre $t = 2$.
- e) À l'aide de la différentielle, estimer la variation de la consommation dans l'intervalle de temps de 2 minutes à 2 minutes et demie.

6. Le Soleil passe au-dessus d'un édifice de 60 m.



- a) En notant θ , l'angle d'élévation du Soleil et x la longueur de l'ombre de l'édifice, décrire la longueur de l'ombre en fonction de l'angle d'élévation.
- b) Déterminer le taux de variation de la longueur de l'ombre lorsque l'angle d'élévation est de 45° , 60° . Exprimer ces résultats en mètres par degré et interpréter selon le contexte.

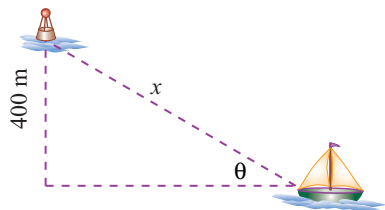
7. La position d'une particule excitée électriquement est donnée par :

$$s(t) = \frac{4 - \sin t}{4 + \sin t} \text{ m,}$$

où t est en secondes.

- a) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation au temps t .
- b) Déterminer en quels instants la vitesse de la particule est nulle.

8. Un voilier descend le fleuve en naviguant en ligne droite. Sa trajectoire le fera passer à 400 m d'une bouée.



- Exprimer la distance entre le bateau et la bouée en fonction de l'angle θ formé par la position de la bouée et la trajectoire du voilier.
- Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la distance par rapport à l'angle θ .
- Calculer la distance et le taux de variation de celle-ci lorsque l'angle est de 30° . Exprimer le taux de variation en mètres par degré. En interprétant ce résultat selon le contexte, dire pourquoi le signe de ce taux de variation est négatif.

9. Utiliser la règle du produit et les propriétés de l'opérateur de dérivation pour démontrer que :

$$a) \frac{d}{dx}(\sin^2 x) = \sin 2x.$$

$$b) \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \cos 2x.$$