Dérivée : fonctions algébriques

Auto-évaluation 03

Solutions

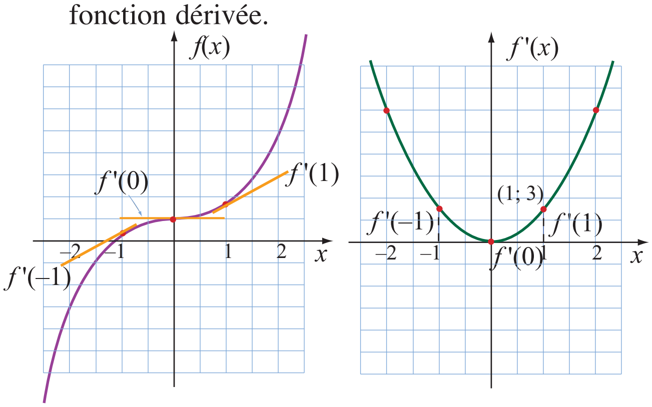
Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. *a*) Donner la définition de la dérivée d'une fonction $f(x)$.

   b) Expliquer ce que signifie cette définition.

   c) Cette limite est de la forme 0/0. Qu'est-ce qui nous permet d'avoir l'assurance que le résultat obtenu a du sens?

2. *a*) En appliquant la définition de fonction dérivée, déterminer la dérivée de la fonction définie par :
   $$f(x) = x^3 + 2.$$
   b) L'illustration suivante présente deux systèmes d'axes, dans le premier la fonction $f(x) = x^3 + 2$ est représentée. Dans le second, représenter sa fonction dérivée.



   c) Calculer $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$. Représenter graphique la valeur obtenue dans le graphique de la fonction et dans celui de la fonction dérivée.

1. *a*) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

   b) Cette définition donne le taux de variation ponctuel en un point quelconque $(x; f(x))$. Le résultat est une fonction décrivant le comportement du taux de variation ponctuel en fonction de l'abscisse x du point.

   c) On peut lever une indétermination de la forme 0/0, c'est une discontinuité non-essentielle. En pratique, par des manipulations algébriques, on détermine une expression continue qui a la même limite lorsque h tend vers 0. On peut alors évaluer cette limite en posant $h = 0$.

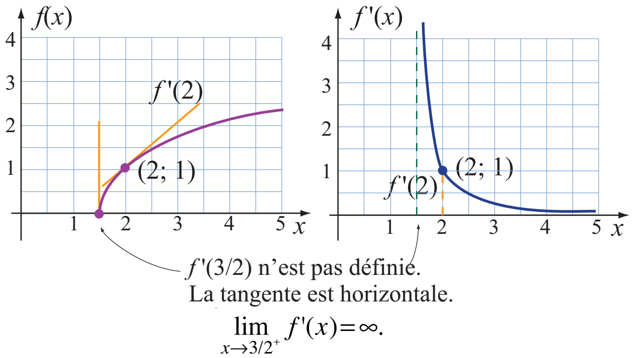
2. *a*) En appliquant la définition, on obtient :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+2-(x^3+2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+2)-(x^3+2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2.
\end{aligned}$$

   c) $f'(-1) = 3\times(-1)^2 = 3$. C'est l'image de –1 par la fonction dérivée et la pente de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse –1.
   $f'(0) = 3\times 0^2 = 0$. C'est l'image de 0 par la fonction dérivée et la pente de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse 0.
   $f'(1) = 3\times 1^2 = 3$. C'est l'image de 1 par la fonction dérivée et la pente de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse 1.

3. *a*) En appliquant la définition de fonction dérivée, déterminer la dérivée de la fonction définie par :
$$f(x)=\sqrt{2x-3}.$$

b) L'illustration suivante présente deux systèmes d'axes, dans le premier la fonction $f(x)=\sqrt{2x-3}$. est représentée. Dans le second, représenter sa fonction dérivée.



c) Calculer $f'(0)$, $f'(3/2)$ et $f'(2)$. Représenter graphique la valeur obtenue dans le graphique de la fonction et dans celui de la fonction dérivée.

4. En appliquant l'opérateur de dérivation, déterminer les zéros de la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+12}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+27}$

3. *a*) En appliquant la définition, on obtient :
$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-3}-\sqrt{2x-3}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h-3}-\sqrt{2x-3}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h-3}-\sqrt{2x-3}}{h}\times\frac{\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3}}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h-3)-(2x-3)}{h(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2}{(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}=\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}.
\end{aligned}$$

c) $f'(0)$ n'est pas définie, 0 n'est pas dans le domaine de la fonction.

$f'(3/2)$ n'est pas définie. De plus, la limite lorsque x tend vers 3/2 de $f'(x)$ est l'infini. La tangente est verticale au point d'abscisse 3/2.

$f'(2) = 1$. C'est l'image de 2 par la fonction dérivée et la pente de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse 2.

4. *a*) $\dfrac{d}{dx}(x^2-2x+4)=2x-2.$

Elle s'annule à $2x - 2 = 0$ qui donne $x = 1$

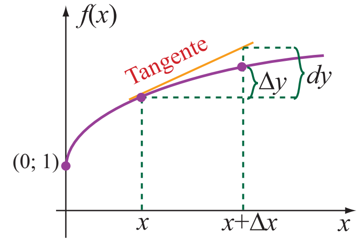
b)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+12}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2x\sqrt{x}-(x^2+12)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}
=\frac{\frac{4x^2-(x^2+12)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{3x^2-12}{2x\sqrt{x}}.$$

Elle s'annule lorsque $3x^2 - 12 = 0$ et $x^2 = 4$. On trouve donc $x = \pm 2$, mais -2 est à rejeter car le domaine de la fonction est $]0; \infty[$.

c)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+27}\right)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+27)-\sqrt{x}\times 2x}{(x^2+27)^2}
=\frac{\frac{(x^2+27)-4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+27)^2}=\frac{27-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+27)^2}.$$

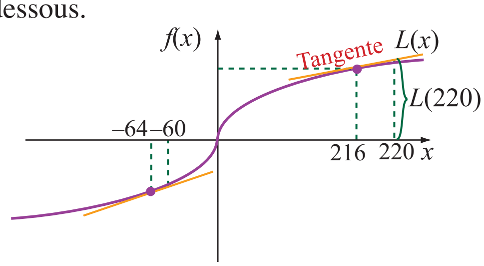
Elle s'annule lorsque $27 - 3x^2 = 0$ et $x = \pm 3$, mais -3 est à rejeter car le domaine de la fonction est $]0; \infty[$. La dérivée s'annule donc à $x = 3$.

5. Soit $y = f(x) = \sqrt{2x} + 1$ dont le graphique est donné ci-dessous. Soit Δx un accroissement de la variable x et Δy l'accroissement de y correspondant à l'accroissement Δx.



a) Représenter Δy sur la figure.
b) En utilisant l'opérateur de dérivation, déterminer $f'(x)$.
c) En posant $dx = \Delta x$, représenter sur la figure la différentielle dy et explique ce qu'elle représente.
d) En utilisant la différentielle, estimer l'image de 2,08 par la fonction.

6. Soit la fonction $y = \sqrt[3]{x}$ dont le graphique est donné ci-dessous.



a) Déterminer un modèle d'approximation linéaire de cette fonction avec 216 comme abscisse du centre d'approximation.

b) Utiliser ce modèle d'approximation linéaire pour estimer $\sqrt[3]{220}$. Dire si cette estimation est en défaut ou en excès.

5. *b*)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2(x+h)}+1\right)-\left(\sqrt{2x}+1\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h}-\sqrt{2x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h}-\sqrt{2x}}{h}\times\frac{\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-2x}{h\left(\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}. \end{aligned}$$

c) dy est une estimation de la variation Δy due à une variation $dx = \Delta x$ de la variable indépendante.

d) La différentielle est donnée par $dy = f'(x)dx$. En considérant $x = 2$ et $dx = 0{,}08$, on a :
$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$
La différentielle est donc :
$$dy\big|_2 = f'(2)dx = \frac{1}{2}\times 0{,}8 = 0{,}4.$$

6. *a*) Le modèle d'approximation linéaire est l'équation de la tangente passant par le point (216; 6). Pour calcule la pente de cette tangente on a recours à la fonction dérivée, soit :
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$
La pente de la tangente est donc :
$$f'(216) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{216}\right)^2} = \frac{1}{3(6)^2} = \frac{1}{108}.$$
Le modèle d'approximation linéaire est :
$$L(x) = f(c) + f'(c)\,(x - c),$$
où $c = 216$, $f(216) = 6$ et $f'(216) = 1/108$. Cela donne :
$$L(x) = 6 + \frac{1}{108}(x-216).$$

b) Pour estimer $\sqrt[3]{220}$, on doit déterminer $L(220)$, ce qui donne :
$$L(220) = 6 + \frac{1}{108}(220-216) = 6 + \frac{4}{108} = 6 + \frac{1}{27}.$$
On trouve donc 163/27. Cette estimation est en excès, c'est-à-dire un peu plus grande que la valeur réelle, car la courbe est concave vers le bas dans cette région.

c) À l'aide d'un modèle d'approximation linéaire, estimer $\sqrt[3]{-60}$.

7. Une système de pompage automatique alimente un réservoir. Lorsque le niveau atteint le seuil critique de 40 litres, la pompe se met automatiquement en marche pour une durée de 40 secondes durant lesquelles le débit est :

$$D(t)=\frac{80t}{t^2+16} \text{ L/s.}$$

a) Déterminer l'intervalle de temps durant lequel le débit est croissant et celui durant lequel il est décroissant.

b) En considérant l'instant $t = 2$ comme centre d'approximation, estimer le débit trois secondes après la mise en marche à l'aide d'un modèle d'approximation linéaire.

c) À l'aide de la différentielle, estimer la variation du débit dans l'intervalle [3; 4], dans l'intervalle [6; 8].

c) Pour estimer $\sqrt[3]{-60}$. Puisque la racine cubique de –64 est facile à déterminer. On peut considérer $c = -64$ comme centre d'approximation. On a donc :

$c = -64$, $f(-64) = 6$ et $f\,'(-64) = 1/48$.

Le modèle est alors :

$$L(x)=-4+\frac{1}{48}(x-(-64)).$$

L'estimation est :

$$L(-60)=-4+\frac{1}{48}(-60-(-64))=-4+\frac{4}{48}$$
$$=-4+\frac{1}{12}=\frac{-47}{12}.$$

Cette estimation est en défaut, c'est-à-dire un peu plus petite que la valeur réelle, car la courbe est concave vers le haut dans cette région.

7. *a*) Pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance, il faut déterminer l'instant où le taux de variation du débit est nul. En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{80t}{t^2+16}\right)=\frac{80(t^2+16)-80t\times 2}{(t^2+16)^2}$$
$$=\frac{80t^2+1280-160t^2}{(t^2+16)^2}=\frac{1280-80t^2}{(t^2+16)^2}.$$

La dérivée s'annule lorsque le numérateur s'annule, ce qui donne :

$1280 - 80t^2 = 0$, d'où $t^2 = 16$ et $t = \pm 4$.

Dans ce contexte, la valeur $t = -4$ est à rejeter et le taux de variation du débit est nul à 4 secondes. Si $t < 4$, le taux de variation est positif, le débit est donc croissant durant l'intervalle [0; 4]. Par la suite, il est décroissant puisque le taux de variation est négatif lorsque $t > 4$.

b) Le modèle d'approximation linéaire est :

$L(t) = D(c) + D'(c)\,(t - c)$,

où $c = 2$ s, $D(c) = 8$ L/s et $D'(2) = 2{,}4$ L/s^2. On a donc :

$L(t) = 8$ L/s $+ 2{,}4$ L/s$^2 \times (t - 2)$ s. En évaluant $L(3)$, on obtient :

$L(3) = 8$ L/s $+ 2{,}4$ L/s$^2 \times (3 - 2)$ s

$= 8$ L/s $+ 2{,}4$ L/s $= 10{,}4$ L/s.

On estime que trois secondes après la mise en marche, le débit est d'environ 104, L/s.

c) La différentielle au temps $t = c$ est donnée par :

$dD|_{c;\,dt} = D'(c)\,dt$. Dans l'intervalle [3; 4], $c = 3$, $dt = 4 - 3 = 1$ s et $D'(3) = 0{,}896$ L/s^2, d'où :

$dD|_{3;\,1} = 0{,}896$ L/s$^2 \times 1$ s $= 0{,}896$ L/s. On estime que durant l'intervalle [3; 4], le débit augmente de 0,896 L/s.

Dans l'intervalle [6; 8], on a :
$c = 6$, $dt = 8 - 6 = 2$ s et $D'(6) = -0{,}592$ L/s^2, d'où :
$dD|_{6;\,2} = -0{,}592 \text{ L/s}^2 \times 2 \text{ s} = -1{,}184$ L/s. On estime que durant l'intervalle [6; 8], le débit diminue de 1,184 L/s.

8. La position par rapport à un point fixe d'une particule excitée électriquement est donnée par :
$s(t) = t^3 - 16t^2 + 64t$ m où t est mesuré en secondes.
   a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse de la particule au temps t, calculer ses zéros et indiquer les intervalles de croissance et de décroissance de la position de la particule par rapport au point de référence.
   b) Déterminer la fonction décrivant l'accélération de la particule au temps t, calculer ses zéros et indiquer les intervalles de croissance et de décroissance de la vitesse de la particule.
   c) Calculer l'accélération lorsque la vitesse est nulle. Interpréter le résultat selon le contexte.
   d) Calculer la vitesse lorsque l'accélération est nulle. Interpréter le résultat selon le contexte.
   e) En calculant la position lorsque la vitesse est nulle et lorsque l'accélération est nulle, décrire la trajectoire de la particule dans le système d'axes ci-dessous en indiquant dans chaque intervalle le comportement des fonctions position, vitesse et accélération.

8. *a*) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 32t + 64 = (3t - 8)(t - 8)$.
La vitesse est nulle à 8/3 s et 8 s.
$v(2) = 12$ m/s, la particule s'éloigne du point de référence dans l'intervalle [0; 8/3[.
$v(4) = -16$ m/s, la particule s'approche du point de référence dans l'intervalle [8/3; 8[.
$v(9) = 19$ m/s, la particule s'approche du point de référence dans l'intervalle [8; ∞[.
b) $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 32$. L'accélération est nulle à 16/3 s.
$a(2) = -20$ m/s^2. La vitesse diminue durant l'intervalle [0; 16/3[.
$a(6) = 4$ m/s^2. La vitesse augmente durant l'intervalle [16/3; ∞[.
c) $a(8/3) = -48/3$ m/s^2. À cet instant, l'accélération tend à ramener la particule en direction du point de référence.
$a(8) = 16$ m/s^2. À cet instant, l'accélération tend à éloigner la particule en direction du point de référence.
d) $v(16/3) = 192/9$. La particule s'éloigne alors du point de référence.